**Ejercicio 1**

**Parte 1:** derivar el estadístico de razón de verosimilitud para la prueba de igualdad de medias.

La matriz de información tiene la siguiente forma:

Donde cada representa la sub-matriz que contiene los datos provenientes de la población g

La función de densidad multivariada es:

Asumiendo que

La prueba puede plantearse de la siguiente forma:

La verosimilitud bajo H0 cierta y asumiendo Σ conocida será:

La cual puede expresarse en término logarítmicos, y remplazando la matriz de varianzas y covarianzas por su expresión máximo verosímil como:

La verosimilitud bajo H1 cierta y asumiendo Σ conocida será:

La cual se maximiza cuando:

Teniendo en cuenta que:

Si llamamos W a la matriz de suma de cuadrados dentro de los grupos:

Con esto, la función de verosimilitud bajo H1 nos queda:

O, en términos logarítmicos:

La matriz de varianzas y covarianzas común cuando la media es distinta (es decir, bajo H1), se estima de la siguiente forma:

Por lo que obtenemos:

Recordando que el cociente de verosimilitudes adquiere la siguiente forma:

O, expresada en forma logarítmica:

Obtenemos que:

El cociente distribuye chi-cuadrado:

Donde sus grados de libertad se obtienen como la diferencia entre las dimensiones de los espacios paramétricos de (es decir: ), y de (es decir: ).

Por lo tanto:

**Parte 2:** derivar el estadístico de razón de verosimilitud para la prueba de igualdad de matices de varianzas y covarianzas.

La matriz de información tiene la siguiente forma:

Donde cada representa la sub-matriz que contiene los datos provenientes de la población g

La función de densidad multivariada es:

La prueba a evaluar es:

La verosimilitud bajo H0 cierta y asumiendo igualdad de medias será:

La verosimilitud bajo H1 cierta y asumiendo Σ conocida será:

La cual se maximiza cuando:

El cociente de verosimilitud será:

**Ejercicio 2**

**Parte 1:** deduzca la esperanza condicional de

Los parámetros de la normal multivariada pueden descomponerse de la siguiente manera:

y

La distribución conjunta de 𝕏 es:

Llamo a la distancia de Mahalanobis:

Donde supusimos que:

De forma tal que:

Reemplazamos los valores en la ecuación

Aplicando distributiva:

Entonces la distribución conjunta es:

Aplico que:

Y obtengo:

Ahora remplazo la expresión y separo en dos expresiones:

Entonces lo que generé fueron dos productos de dos densidades de funciones normales. La primera de ellas es la densidad de tal que:

La otra es la densidad condicional:

Debido a que:

Por lo cual, dada la simetría de la normal:

En conclusión, la esperanza de es:

**Parte 2:** demuestre que

**Parte 3:** derive la distribución de

Necesito calcular la distribución marginal de :

Nótese que estoy haciendo la misma descomposición que en la parte 1, solo que ahora , mientras que . Por simplicidad de notación, reorganizo las variables de forma tal de que la p-1, la coloco en la posición p, y les alterno los nombres (sub-índices).

El vector de medias queda partido de la siguiente forma:

Mientras que la matriz de varianzas y covarianzas queda:

Donde:

La función de densidad conjunta de las p variables puede expresarse como:

Nótese que la misma fue expresa como el producto entre la densidad condicionada a las primeras p-1 variables por la densidad marginal de la p-ésima variable:

Para calcular la función marginal de p, puede dividir la distribución conjunta entre la condicional:

Operando llego a que:

También puedo calcularla como la integral de la densidad conjunta respecto de los primeros p-1 diferenciales:

Esta integral puedo separarla en el producto de la densidad de de las primeras p-1 variables, por la densidad de la p-ésima variable operando la matriz de varianzas y covarianzas como se realizó en la parte 1 del ejercicio. Luego, todo lo que esté expresado en función de p, puede sacarse de la integral por ser una constante en los diferenciales 1, …, p-1.

Dado que lo que queda entre las integrales es una densidad, la misma vale 1, por lo que:

**Ejercicio 3**

**Parte 1:** demostrar que

**Parte 2:** demostrar que